Factorsの構成法と接合積 (作用素環とその物理的応用に関する研究会報告集)

数理解析研究所講究録
5巻 1965年 19-39

Factors の構成法と接合積

東北大学教育学部　　鶴　丸　孝　司

緒　言

1937年に F. J. Murray − J von Neumann が Rings of Operators を発表するに際して，その研究の目的とか動機とかをくわしくのべているが，その第4として有限基のない代数の一つの class へのアプローチを与えるものとのべている。そして事実色々の代数的概念が導入されて種々研究されているが，只接合積の概念のみが explicit には導入されていないように思われることを1955−56年頃注意しました処，その後これについて中村−武田，鈴木，斉藤の諸氏が色々の結果を報告されましたので，ここで von Neumann の factor 構成との関係，今迄に知られている factor の例等について報告することにする。以下各§ごとに大要をのべよう。用語は殆ど J. Dixmier の〔5〕による。

§1.　von Neumann の factor 構成と接合積

von Neumann が 1937年に与えた factor 構成についてのべ，それより接合積の定義を導き，それが factor になる条件について考える。

§2.　countable group の automorphic 表現

ここでは任意の countable group が approximately finite factor の outer automorphisms の群として表現されるという結果を示す。

§3.　Factors の examples

ここでは von Neumann 以来 factor の分離について用いられた性質について考え Schwartz, Pukanszky の結果についてのべる。

§4.　接合積についての二，三の結果

接合積について現在までに示された主なる結果を紹介する。

Appendix 作用素環の生成

以上の話とは一寸話題が離れるが，作用素環がどんな作用素から生成されるか，また逆に作用素がどんな作用素を生成するかについての最近までの結果を紹介する。

§1. von Neumann の factor 構成と接合積

まず von Neumann が Rings of operators (1937年) で与えた最初の factor 構成から考えてみることにしよう。

(X, μ) を可分な測度空間，$(\mu \geqq 0)$

G を countable ergodic m-group in X，即ち，任意の $\alpha \in G$ に対して，$x \longrightarrow x\alpha$ は X 上の one-to-one mapping で，

(i) $E \subset X$ が可測ならば $\mu(E) = \mu(E\alpha)$ for all $\alpha \in G$

(ii) $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$

(iii) free : $\mu(\{x \in X \mid x = x\alpha\}) = 0$, if $\alpha \neq 1$ (=unit of G)

(iv) ergodic : $\mu(E \triangle E\alpha) = 0$ for all $\alpha \in G \Rightarrow \mu(E) = 0$ or $\mu(X - E) = 0$,

とする。このとき $L^2(X, \mu)$ 上に次のような作用素を定義する：

$$\begin{array}{ll} \alpha \in G \text{ に対して :} & [u_\alpha f](x) = f(x\alpha) \\ \varphi \in L^\infty(X, \mu) \text{ に対して :} & [\ell_\varphi f](x) = \varphi(x) f(x) \end{array} \quad (f \in L^2(X, \mu))$$

すると u_α は $L^2(X, \mu)$ 上の unitary 作用素で

$$V = \{ u_\alpha \mid \alpha \in G \}, \qquad L = \{ \ell_\phi \mid \phi \in L^\infty(X, \mu) \}$$

とおくと $\alpha \to u_\alpha$ は G の $L^2(X, \mu)$ への unitary 表現で，L は $L^2(X, \mu)$ 上の maximal abelian ring である。

次に $L^2(X \times G) = L^2(X, \mu) \otimes \ell^2(G)$ 上で次のような作用素を定義する：

$$\begin{array}{ll} \alpha \in G \text{ に対して :} & [U_\alpha F](x, \beta) = F(x\alpha, \beta\alpha) \\ \varphi \in L^\infty(X, \mu) \text{ に対して :} & [L_\varphi F](x, \beta) = \varphi(x) F(x, \beta) \end{array} \quad (F \in L^2(X \times G))$$

このとき von Neumann の与えた結果は次のようになる。

<u>定理 1.</u> <u>G が (X, μ) 上 ergodic, m-group ならば作用素環</u>

$$\mathbf{M} = \mathcal{R}(L_\varphi, U_\alpha \mid \varphi \in L^\infty(X, \mu), \alpha \in G)$$

<u>は factor である。更にこの際 $L^2(X \times G) = L^2(X, \mu) \otimes \ell^2(G)$ だから</u>
<u>$L^2(X \times G)$ 上の作用素は行列表示が出来るが，特に $T \in \mathbf{M}$ ならば</u>

$$T \sim \langle T_{\alpha,\beta} \rangle_{\alpha,\beta \in G}, \quad T_{\alpha,\beta} = L_{\varphi_{\alpha\beta^{-1}}(x)} U_{\beta^{-1}\alpha}, \quad \varphi_c(x) \in L^\infty(X, \mu)$$

の形をしている。そこで $T \in \mathbf{M}$ に対して

$$\mathrm{tr}\,(T) = \int_X \varphi_1\,(x)\;d\mu\,(x)$$

と定義すると

(1) $\mu\,(X) < \infty$ のとき $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ は $\mathbf{M}$ 上の finite faithful traceになり，従つて $\mathbf{M}$ は有限型，

(2) $\mu\,(X) = \infty$ のときは $\mathbf{M}$ は無限型

である。

これらの場合

(イ) $\mu(\{x\}) > 0$, for all $x \in X$ ならば $\mathbf{M}$ はI型，で

(ロ) $\mu(\{x\}) = 0$, for all $x \in X$ ならば $\mathbf{M}$ はII型

である。

以上の von Neumann の factor 構成は丁度環論における接合積（crossed product）と同じ方法であることに注意して次のような定義をする。

$\mathbf{A}$を（可分な）ヒルベルト空間 H 上の作用素環で，$\mathrm{tr}\,(\cdot)$ をその faithful normal trace, $\mathrm{tr}\,(a) = \langle a\phi_0, \phi_0 \rangle$, $[\mathbf{A}\phi_0] = [\mathbf{A}'\phi_0] = H$とし，G を $\mathbf{A}$ の $*$-automorphisms の（countable）group とする。〔$\alpha \in G$ による $a \in \mathbf{A}$ の像を a^{α} と書くことにする〕

このとき G 上で定義され，値を $\mathbf{A}$ にとる函数を $\Sigma_{\alpha \in G}\,\alpha \otimes a_{\alpha}$ で示し

$$S = \{\Sigma_{\alpha \in G}\,\alpha \otimes a_{\alpha} \mid \text{有限個の } \alpha \text{ を除いて } a_{\alpha} = 0\}$$

とおき，S に積と $*$-operation を

$$(\Sigma_{\alpha \in G}\alpha \otimes a_{\alpha})(\Sigma_{\beta \in G}\beta \otimes b_{\beta}) = \Sigma_{\alpha, \beta \in G}\,\alpha\beta \otimes a_{\alpha} b_{\beta}^{\alpha-1},$$

$$(\Sigma_{\alpha \in G}\alpha \otimes a_{\alpha})^{*} = \Sigma_{\alpha \in G}\,\alpha^{-1} \otimes a_{\alpha}^{*a}$$

と定義すると S は $*$-代数になる。

扨，一方 $\mathbf{A}$ は H 上 standardly に act しているから trace vector ϕ_0 を用いて $\alpha \in G$ に対して H 上の作用素

$$u(\alpha)\ :\ a\phi_0 \to a^{\alpha^{-1}}\phi_0$$

を定義すると $\alpha \to u(\alpha)$ は G の H への faithful な unitary 表現で，更に automorphism α は

$$u(\alpha)^* a\, u(\alpha) = a^{\alpha} \qquad a \in \mathbf{A}$$

と与えられる。そこで $\mathfrak{H} = H \otimes \ell^2(G)$ 上に

$$U_\alpha\ :\ U_\alpha(\Sigma_{\beta\in G}\xi_\beta \otimes \varepsilon_\beta) = \Sigma_{\beta\in G}u(\alpha)\,\xi_\beta \otimes \varepsilon_{\alpha\beta}$$

ここに，$\Sigma\,\xi_\beta \otimes \varepsilon_\beta \in \mathfrak{H}$，$\left(\varepsilon_\beta(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma \neq \beta \\ 1 & \gamma = \beta \end{cases}\right)$

と定義すると $\alpha \to U_\alpha$ は G の $\mathfrak{H}$ 上への unitary 表現で

$$U_\alpha^*\,(a \otimes 1)\,U_\alpha = a^\alpha \otimes 1$$

がなりたつ。従って $\mathbf{A} \otimes 1$ に $\alpha \in G$ を自然に拡大して $A = a \otimes 1 \to A^\alpha = a^\alpha \otimes 1$ と定義すると，

$$(AU_\alpha)(BU_\beta) = AB^{\alpha^{-1}}U_{\alpha\beta}$$

$$(AU_\alpha)^* = A^{*\alpha}U_{\alpha^{-1}}$$

よつて

$$\mathfrak{S} = \{\Sigma_{\alpha\in G}A_\alpha U_\alpha \mid \text{有限個の } \alpha \text{ を除いて } A_\alpha = 0\}$$

とおくと

$$\Sigma_{\alpha\in G}\,\alpha \otimes a_\alpha \qquad \leftrightarrow \Sigma_{\alpha\in G}A_\alpha U_\alpha,\quad A_\alpha = a_\alpha \otimes 1$$

によつて S と $\mathfrak{S}$ は同型である。

定義　$\mathfrak{S}$ の $\mathfrak{H}$ 上での weak closure を $\mathbf{A}$ の G による接合積といい $(\mathbf{A}, G)$ と表わす。

この際

$$\tau(A_\alpha U_\alpha) = \begin{cases} tr(A_\alpha), & if\ \alpha=1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$\tau(\Sigma_{\alpha\in G} A_\alpha U_\alpha) = \Sigma\,\tau(A_\alpha U_\alpha)$$

とおくと $\tau(\cdot)$ は $(\mathbf{A}, G)$ の trace になり $\phi_0 \otimes \varepsilon_1$ は τ の trace vector になる。

以上は丁度 abstract algebra の場合の接合積を拡大したものになつているが，さきにのべた von Neumann の factor 構成は丁度 $\mathbf{A}$ として maximal abelian ring L をとり G として m-group G よりひきおこされる L の automorphism をとつて $(\mathbf{A}, G)$ を作つたものに他ならない。

扨，abstract algebraの場合の接合積の元の表現に対してこの場合は次の表現定理がなりたつこともごく自然なことであろう。

<u>定理 2.</u>　<u>接合積 $(\mathbf{A}, G)$ の元 T に対して一意に $\{t_\alpha\} \subset \mathbf{A}$ が存在して</u>

$$T = \Sigma'_{\alpha\in G} T_\alpha U_\alpha, \quad T_\alpha = t_\alpha \otimes 1$$

<u>Σ' は metrical convergence を意味する</u>

略証　$|T| \leqq 1$ として一般を失わない。Kaplansky の density theorem により $\exists$ directed family $\{T^{(\lambda)}\} \subset \mathfrak{S}$: $T^{(\lambda)} \to T$ (strongly), $|T^{(\lambda)}| \leqq 1$.
$T^{(\lambda)} \in \mathfrak{S}$ より $\exists \{t_\alpha^{(\lambda)}\} \subset \mathbf{A}$: $T^{(\lambda)} = \Sigma_{\alpha\in G}(t_\alpha^{(\lambda)} \otimes 1) U_\alpha$, $|t_\alpha^{(\lambda)}| \leqq 1$
$T^{(\lambda)} \to T$ (strongly) より $|(t_\alpha^{(\lambda)} - t_\alpha^{(\lambda)})\xi| \to 0$ for all $\xi \in H$, $\alpha \in G$
即ち，$\{t_\alpha^{(\lambda)} | \lambda\}$ は各 $\alpha \in G$ について $\mathbf{A}$ の strongly Cauchy よつて $s\text{-}\lim_\lambda t_\alpha^{(\lambda)} = t_\alpha$ が存在する。よつて $t_\alpha^{(\lambda)} \otimes 1 \to t_\alpha \otimes 1 = T_\alpha$。これを用いると

$$T(\xi \otimes \varepsilon_1) = \Sigma_{\alpha\in G} T_\alpha U_\alpha (\xi \otimes \varepsilon_1) \quad for\ all\ \xi \in H$$

i. e.,

$$T = \Sigma'_{\alpha\in G} T_\alpha U_\alpha$$

また $\Sigma_{\alpha \in G} T_\alpha U_\alpha (\xi \otimes \varepsilon_1) = 0$ より $T_\alpha = 0$ が従うから $\{T_\alpha\}$ は一意に存在する。（証終り）

扨，以上のように定義された接合積はいつでも factor になるか？ というのが最初の疑問であるが，これについては否定的なことが次の例でわかる。

例　$\mathbf{A}$ をヒルベルト空間 H 上の II_1−factor とすると，容易にわかるように $\mathbf{A}$ の unitary 作用素 u で $u^2 = 1$ なるものがとれる。いま G として u と 1 から生成される $\mathbf{A}$ の automorphism group とすると

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I & \frac{1}{2} I \\ \frac{1}{2} I & \frac{1}{2} I \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{H} = H \otimes \ell^2(G)$ 上の projection で，$\neq 0$，且つ

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I \end{pmatrix} U_1 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} u \end{pmatrix} U_u$$

となり $(\mathbf{A}, G)$ の center に属する。従って $(\mathbf{A}, G)$ は factor ではない。

したがって $(\mathbf{A}, G)$ が factor になるための条件は何かが問題になるが，これについては次の定理３，４が基本的であろう。

定理 3.　$\mathbf{A}$ を faithful normal trace tr(・) をもつ有限型作用素環で，G を $\mathbf{A}$ の automorphisms の group とする。$\mathbf{A}$, G が次の(1)，(2)を満足するとき接合積 $(\mathbf{A}, G)$ は factor である：

(1) G は ergodic である，即ち G−不変な $\mathbf{A}$ の center の元は $\lambda 1$ のみである。

(2) $ba = ab^\alpha$ $(\alpha \neq 1)$ for all $b \in \mathbf{A}$ ならば $a = 0$ である。

略証　$\Sigma'_{\alpha \in G} A_\alpha U_\alpha \in (\mathbf{A}, G) \cap (\mathbf{A}, G)'$ とすると

$$\Sigma' (b a_\alpha \otimes 1) U_\alpha = (b \otimes 1)(\Sigma' (a_\alpha \otimes 1) U_\alpha) = (\Sigma' (a_\alpha \otimes 1) U_\alpha)(b \otimes 1)$$

$$= \Sigma' (a_\alpha \otimes 1)(b^{\alpha^{-1}} \otimes 1) U_\alpha \qquad \text{for all } b \in \mathbf{A}$$

よって $b a_\alpha \otimes 1 = a_\alpha b^{\alpha^{-1}} \otimes 1$ for all $\alpha \in G$

$\alpha \neq 1$ のとき $ba_\alpha = a_\alpha b^{\alpha^{-1}}$ ($b \in \mathbf{A}$, 任意), よって(2)により $a_\alpha = 0$

$\alpha = 1$ のとき $ba_1 = a_1 b$. ($b \in \mathbf{A}$, 任意) よつて $a \in A^b$, よつて $\Sigma' A_\alpha U_\alpha =$ $(a_1 \otimes 1) U_1$ となり, これが各 U_β と可換なことから(1)により $a_1 = \lambda 1$.

i, e., $\Sigma' A_\alpha U_\alpha = \lambda 1$　(証終り)

定理3では **A** を factor に限らなかつたが **A** を factor に限ると次の定理4は基本的であろう。

<u>定理 4. **A** を faithful normal trace tr(·) をもつ有限型 factor で, G を **A** の outer automorphism group とすれば接合積 (**A**, G) は有限型 factor である。</u>

略証　これを示すには **A** を有限型 factor, $\alpha \in G$ ($\alpha \neq 1$) とするとき,

$$ba = ab^\alpha \quad \text{for all} \quad b \in \mathbf{A} \Rightarrow a = 0$$

が成り立つことを示せばよい。

扨, I = a **A** とおくと I は A の両側イデアル。一方有限型 factor は単純。従つて I = **A** か I = (0)。もし I = **A** なら a は正則元となり α が inner automorphism になつてしまう。故に I = (0)。即ち a = 0。

文献　〔6〕,〔7〕,〔10〕,〔25〕,〔34〕

§2. Countable group の outer automorphisms としての表現

前節の定理4によると有限型 factor の outer automorphisms の group をもつてくればその接合積がまた factor になるから, outer automorphisms の group のとり方が問題になつてくる。これについては1958年鈴木, 中村ー武田が任意の countable group は可分なヒルベルト空間上の approximately finite factor の outer automorphisms の group として同型に表現されることを証明した。更に1961年斉藤はこれをⅡ型 factor の outer automorphisms の group としても良いことを注意し, その証明が両者平行に行えることを示した。以下それを示すことにする。

von Neumann が Rings of operators Ⅲ にえた結果は次のようなものである。

(X, μ) を可分な測度空間，

G は X 上の変換群で，§1の場合とことなり，$\alpha \in G$ に対して測度 $\mu_\alpha(E) = \mu(E\alpha)$（E：$\mu$−可測集合）を作ると μ_α が μ に関して絶対連続とする。勿論 free で ergodic なことは仮定する。

このとき次の定義をする：

<u>定義</u>　G が measurable であるとは，μ と同値（互に絶対連続）な G−不変な測度 ν が存在することである：即ち

$$\exists \nu : \mu(E) = 0 \Leftrightarrow \nu(E) = 0$$
$$\nu(E) = \nu(E\alpha) \qquad (E：可測集合，\ \alpha \in G)$$

§1の場合と同様に $L^2(X, \mu)$ 上で

$$\alpha \in G \text{ に対して：} \quad [u_\alpha f](x) = \left(\frac{d\mu_\alpha}{d\mu}(x)\right)^{1/2} f(x\alpha) \qquad (f \in L^2(X, \mu))$$

$$\varphi \in L^\infty(X, \mu) \text{ に対して：} \quad [\ell_\varphi f](x) = \varphi(x) f(x)$$

と定義すると $\alpha \to u_\alpha$ は G の表現になり，更に $\mathfrak{H} = L^2(X, \mu) \otimes \ell^2(G)$ 上で

$$\alpha \in G \text{ に対して：} \quad [U_\alpha F](x, \beta) = \left(\frac{d\mu_\alpha}{d\mu}(x)\right)^{1/2} F(x\alpha, \beta\alpha) \qquad (F \in L^2(X \times G))$$

$$\varphi \in L^\infty(X, \mu) \text{ に対して：} \quad [L_\varphi F](x, \beta) = \varphi(x) F(x, \beta)$$

と定義し $\mathbf{M} = \mathcal{R}(U_\alpha, L_\varphi \mid \alpha \in G, \varphi \in L^\infty(X, \mu))$ とおくと，

<u>定理 5.</u>　<u>(X, μ)，G を上記の如くとるとき</u>

1°　<u>G が measurable $\Rightarrow$ $\mathbf{M}$ は I 型又は II 型</u>

2°　<u>G が non-measurable $\Rightarrow$ $\mathbf{M}$ は III 型</u>

<u>である。</u>

さて，G を任意の countable infinite group とし

$$\Delta = \{ \alpha = \alpha(g) \mid \alpha(g) \text{ は G の有限集合上で1で他では0} \}$$

とおき $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $[\alpha + \beta](g) = \alpha(g) + \beta(g) \pmod 2$ と定義して Δ を group と考える。

さらに，

$$\triangle' = \{\ \varphi = \varphi(\alpha)\ |\ \varphi(\alpha)\ \text{は}\ \triangle\ \text{の有限集合上で1で他では0}\ \}$$

とし，$\triangle$ と同様に $\triangle'$ も加群だと考える。

次に $X_0 = \{0, 1\}$，その上の測度 μ_0 を

$$\mu_0(\{0\}) = p, \quad \mu_0(\{1\}) = q, \quad q \geqq p > 0, \quad p + q = 1$$

と与え，各 $\alpha \in \triangle$ に対して測度空間 $(X_\alpha, \mu_\alpha) = (X_0, \mu_0)$ を対応させ，その直積測度空間 $\Pi_{\alpha \in \triangle}(X_\alpha, \mu_\alpha)$ を (X, μ) とおく。勿論 $x \in X$ は $\varDelta$ 上の0か1のみを値にとる函数と考えてよいから $\varDelta'$ は X の部分群と考えてよい。

$H = L^2(X, \mu)$ とおき $\mathbf{A}$ をその上の multiplication algebra $L^\infty(X, \mu)$ とする。

ここで次のように定義して $\varDelta$，$\varDelta'$ G を X 上の変換群と考える：

$$\begin{aligned}
&\alpha \in \varDelta: && x \to x^\alpha, && x^\alpha(\delta) = x(\alpha + \delta) \\
&\varphi \in \varDelta': && x \to x^\varphi, && x^\varphi(\delta) = x(\delta) + \varphi(\delta) \pmod 2 \quad (x \in X, \delta \in \varDelta) \\
&g \in G: && x \to x^g, && x^g(\delta) = x(\delta^{g^{-1}}),\ \text{ここに}\ \delta^g(h) = \delta(gh)
\end{aligned}$$

更に，$\mathfrak{G} = (\varDelta', \varDelta) = \{\ (\varphi, \alpha)\ |\ \varphi \in \varDelta', \ \alpha \in \varDelta\}$ に積を

$$(\varphi, \alpha)(\psi, \beta) = (\varphi^\beta + \psi, \alpha + \beta), \quad \varphi^\alpha(\delta) = \varphi(\alpha + \delta)$$

と定義すると $\mathfrak{G}$ は $(0, 0)$ を単位元として (φ, α) の逆元として (φ^α, α) をもつような群になり，さらに

$$(\varphi, \alpha) \in \mathfrak{G}, \quad x \to x^{(\varphi, \alpha)}; \quad x^{(\varphi, \alpha)}(\delta) = x(\alpha + \delta) + \varphi(\delta)$$

と定めることにより $\mathfrak{G}$ は X 上の変換群と考えられる。このとき次のことが成り立つ：

<u>$\mathfrak{G}$ は (X, μ) 上 free, ergodic で</u>

① $q = p = \frac{1}{2}$ <u>のとき　は measurable, で</u>

② $q > p > 0$ <u>のとき　は non-measurable 。</u>

したがって $\mathfrak{H}_{\mathcal{G}} = H \otimes \ell^2(\mathcal{G})$ 上で

$$a \in \mathbf{A}: \quad [AF](x,(\psi,\beta)) = a(x)\,F(x,(\psi,\beta))$$

$$\alpha \in \Delta: \quad [U_\alpha F](x,(\psi,\beta)) = F(x^\alpha,(\psi,\beta)(0,\alpha))$$

$$\varphi \in \Delta': \quad [U_\varphi F](x,(\psi,\beta)) = \left(\frac{d\mu_\varphi}{d\mu}(x)\right)^{1/2} F(x^\varphi,(\psi,\beta)(\varphi,0))$$

と定義し，$U_{(\varphi,\alpha)} = U_\alpha U_\varphi$ とおくと，$(\varphi,\alpha) \to U_{(\varphi,\alpha)}$ は $\mathcal{G}$ の $\mathfrak{H}_{\mathcal{G}}$ 上へ の unitary表現で，従って定理5と上記①②により

$$\mathbf{M} = \mathcal{R}\left(A,\ U_{(\varphi,\alpha)} \,\middle|\, A \in \mathbf{A}\otimes 1,\ (\varphi,\alpha) \in \mathcal{G}\right)$$

は

①′ $q=p=\frac{1}{2}$ のとき II_1−factor で，approximately finite,

②′ $q>p>0$ のとき III−factor。

次に $g \in G$ に対して $\mathcal{G}$ 上次の変換を定義する：

$$(\varphi,\alpha) \to (\varphi,\alpha)^g = (\varphi^g,\ \alpha^g)$$

ここに，$\alpha^g(h) = \alpha(gh)$，$\varphi^g(\delta) = \varphi(\delta^{g^{-1}})$．

そして $\mathfrak{H}_{\mathcal{G}} = L^2(X,\mu) \otimes \ell^2(\mathcal{G})$ 上の unitary 作用素 U_g $(g \in G)$ を

$$[U_g F](x,(\psi,\beta)) = F(x^g,(\psi,\beta)^g),\quad (F \in \mathfrak{H}_{\mathcal{G}} = L^2(X\otimes\mathcal{G}))$$

と定義すると

1° $(\varphi,\alpha) \in \mathcal{G}$，$g \in G$，$a \in \mathbf{A}$ に対して

$$U_{g^{-1}} U_{(\varphi,\alpha)} U_g = U_{(\varphi,\alpha)^g},$$

$$U_{g^{-1}} A U_g = A^g \quad (\text{ここに } [A^g F](x,(\psi,\beta)) = a(x^{g^{-1}})F(x,(\psi,\beta)))$$

したがって $g \to U_g$ は G の $\mathfrak{H}_{\mathcal{G}}$ 上への unitary 表現で $T \to U_{g^{-1}} T U_g$ $(T \in \mathbf{M})$ は $\mathbf{M}$ の automorphism を与える。

2° この automorphism は outer であることが次のようにしてわかる。
即ち，もし1以外の G の元が outer でないとすると，

$$^\exists g \in G,\ g \neq 1:\quad T \to U_{g-1} T U_g \text{ が inner}$$

即ち，

$$^\exists U \in M^u:\quad U^{-1} T U = U_{g-1} T U_g \qquad \text{for all } T \in \mathbf{M}$$

特に $T = U_{(0,\alpha)}$ととると $U^{-1} U_{(0,\alpha)} U = U_{g-1} U_{(0,\alpha)} U_g =$
$U_{(0,\alpha g)} \in \mathcal{R}(U_{(0,\alpha)} | \alpha \in \Delta) = \mathbf{P}$ 所が Pukansk によれば
$\mathcal{R}(V \in \mathbf{M}^u | V^* \mathbf{P} V \leqq \mathbf{P}) = \mathbf{P}$。 したがつて $U \in \mathbf{P}$. よつて $U_{(0,\alpha)} =$
$U_{(0,\alpha g)}$ $(\alpha \in \Delta)$, $\alpha = \alpha^g$ forall $\alpha \in \Delta$。よつて $g = 1$ となり矛盾。

以上によつて本§の最初にのべた次の定理が証明された。

定理6. 〔6′〕 任意の countable infinite group は可分なヒルベルト空間上の approximataly finite factor 〔Ⅱ型 factor〕の outer automorphism group と同型に表現される。

文献 〔1〕，〔8〕，〔11〕，〔12〕，〔18〕，〔21〕，〔24〕

§3. Factor の examples

接合積の研究は，抽象代数の概念を expeicit に作用素環の研究に導入すること，そしてその性質をどこまでもちこめるかをしらべるという意味の他に，新しい型の factor 構成が可能ではないかという目的があつた。即ち group を色々ととることによつて§2でえられた同型表現による outer autormorphism の group による接合積を作れば non−isomorphic なものがえられないか？ というのである。しかし，この方法は本質的には von Neumann を出ないのであるから，次にのべるような factor を分離するような性質の研究と平行して行なわれなければならないであろう。

ここで今までに得られている factor の例と，それを分離する性質をのべることにしよう。

まず von Neumann は II_1−factor の例を§1でのべた方法より，はるかに簡単に次のようにした。

G を discrete countable group とし，$\ell^2(G)$ の上のGの正則表現を

v_g : $(v_g f)(h) = f(g^{-1}h)$ ($f \in \ell^2(G)$ とし，$V(G) = \mathcal{R}(v_g \mid g \in G)$
とおく。すると

V(G) が factor $\iff$ $C_g = \{h^{-1}gh \mid h \in G\}$ が infinite forall $g \neq 1$
が成りたつことを示し，更に G が locally finite group ならば V(G) は
approximately finite factor であることを証明した。そして，これと他の
II_1－factor を分離するために次の性質 (Γ) を導入した。

定義　II_1－factor $\mathbf{M}$ が性質 (Γ) をもつというのは

$$^\forall T_1, \cdots, T_n \quad \mathbf{M}, \varepsilon > 0 ;\ \exists U \in \mathbf{M}^v : \mathrm{tr}(U) = 0,\ \mathrm{tr}((T_k U - UT_k)^*(T_k U - UT_k)) < \varepsilon$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

がなりたつことである。

定理 7. approximately finite factor は性質 (Γ) をもち，Φ を 2 個の生成元をもつ free group とすると V(Φ) は性質 (Γ) をもたない II_1－factor である。

証明は von Neumann〔9〕による。

III型 factor の example については定理 5 でのべたし，II_∞－factor は II_1－factor と I'_∞－factor の直積として得られるから一応すべての例が作られたわけであるが，既に定理 7 で示したように II_1 型には同型でないものが存在する。一方可分なヒルベルト空間上の approximatly finite factor はすべて同型になることが知られているから II_1－factor で non－approximately finite factor で互に同型でないものが存在するか？ が作用素環論の重要な問題として残された訳であるが 1963 年 J. Schwartz がこれを解決した。これよりさき 1956 年 L. Pukanszky は III型 factor について，同型でないものの存在を示した。以下これらの結果を詔介する。

まず L. Pukanszky は III型 factor を分離するため作用素環に次の性質 (L) を導入した。

定義　作用素環 $\mathbf{A}$ が性質 (L) をもつというのは

$$^\exists\{u_k\} \subset \mathbf{A}^u :\ \text{w-}\lim_{k\to\infty} u_k = 0,\quad \text{s-}\lim_{k\to\infty} u_k^* a u_k = a \ \text{ for all } a \in \mathbf{A}$$

なることである。

定理 8. Ⅲ－factorで性質（L）をもつものと，もたないものが存在する。従つてそれらは同型ではない。

この定理の証明法が§2の群の表現に用いたものであるが，ここでは省略する。

J. Schwartz の II_1－factor に関する結果は次のようなものである。

定理 9. Πを無限個のものの置換で，有限個を除いて fix しているもの全体の作る群；Φ を二個の生成元をもつ自由群とすると，$V(\Phi)$ ，$V(\Phi\times\Pi)$ はともに approximately finiteでない，互に同型でない II_1－factor である。

この定理の証明は大略次のような方針で行われる。

(1) 定義 ヒルベルト空間H上の作用素環 $\mathbf{A}$ が性質（P）をもつというのは

$$^{\forall}T\in L(H)\ :\ \overline{\mathrm{convex}}(UTU^* \mid U\in \mathbf{A}^u)\cap \mathbf{A}' \neq \phi \quad {}^{1)}$$

がなりたつことである。

(2) $\mathbf{A}$ が approximately finite factor $\Rightarrow$ $\mathbf{A}\in$ (P)

(3) factor $V(G)\in$ (P) $\Rightarrow$ G には $\mu(G)=1$ なる如き右－不変有限加法的測度μが存在する。

(4) Φ には(3)のような測度はない。したがつて $\Phi\times\Pi$ にもない。よつて $V(\Phi)$，$V(\Phi\times\Pi)\notin$ (P)

(5) von Neumann によれば $V(\Phi)\notin(\Gamma)$ ，$V(\Pi)\in(\Gamma)$

(6) Misonou によれば一方が（Γ）をもてばその直積は（Γ）をもつから $V(\Phi\times\Pi)\in(\Gamma)$.

尚，上記性質のうちで（Γ）と（L）は algebraic であるが（P）は spatial である。最近，長田－越後は（P）にかわる algebraic property として次のような（Q）を導入し Schwartz の結果を再生した。

定義 作用素環 $\mathbf{A}$ が性質（Q）をもつとは

$$^{\exists}G\subset \mathbf{A}^u :\ G \text{ は amenable, かつ } \mathcal{R}(G)=\mathbf{A}.$$

なることである。ここに G が amenable とは $L^\infty(G)$ に Banach mean が存在することである。

---

1) L(H) は H上の full oprator algebra で convex は weakly closed convex hull を示す。

J. Schwartz はまた (P) は何型の作用素環にも用いられることからⅢ型にこれを用いて次の結果をえた。

定理 10. Ⅲ－型 factorの中に共に (L) をもつて，一つは (P) をもち，他は (P) をもたないものが存在する。

以上から現在までの factor の例は次のようになつている：

- Ⅰ 型　これについては full operator ring として既知。
- II_1 型
  - Approximately finite factor 〔(Γ) も (P) ももつている〕
  - Non approximately finite factor
    - (P) をもたず (Γ) をもつもの
    - (P) をもたず (Γ) ももたないもの
- II_∞ 型　II_1 型 $\otimes$ I_∞ 型
- Ⅲ 型
  - (L) をもたないもの
  - (L) をもつもの
    - commutant が (P) をもつもの
    - commusant が (P) をもたないもの

文献　〔2〕，〔3〕，〔4〕，〔8〕，〔9〕，〔18〕，〔24〕，〔25〕

§ 4.　接合積についての二，三の結果

ここで現在までにえられている接合積の結果について述べる。これらの結果は大体に於いて三つの群に分けられる。即ち 1° 接合積の定義そのものについてのもの，2° 有限型の Galois theory like のもの，3° 接合積のもつている性質についてのものの三つである。

1° については吾々の定義の不変性を示す定理11 のみをあげる。定義そのものをもつと一般的に因子団をもつ場合に拡大したものも武田によりなされているがここではふれない。2° についても II_1－factor の有限群による接合積について中村－武田により部分環と部分群の対応が完全に示されているが，これらについてもくわしくはふれないで，定理12 をあげるにとどめる。3° については主に接合積が factor になるための条件についてのものと，§3でのべた factor の性質についてのもの及び直積との関係についてのものをのべる。

定理 11. **A**，**B** を共に invariant $C=1$ なる如き有限型 factor で θ を **A** と **B** の同型対応，G_1，G_2 を夫々 **A**，**B** の automorphism の群で，η を G_1 と G_2 の同型対応とする。

このとき

$$\theta(a^{\sigma})=\theta(a)^{\eta(\sigma)} \quad \text{for all } a\in\mathbf{A},\ \sigma\in G$$

がなりたつならば $(\mathbf{A}, G_1)$ と $(\mathbf{B}, G_2)$ は spatially に同型である。

これはごく自然な対応で証明がつけられるから省略する。

定理 12. $\mathbf{A}$ を有限型 factor でその invariant $C=1$; G を $\mathbf{A}$ の outer automorphisms の group, $\mathbf{B}$ を接合積 $(\mathbf{A}, G)$ の subfactor で $A\otimes 1$ を含むものとすれば

$$\exists G_0 : G\text{の部分群},\quad \mathbf{B}\simeq(\mathbf{A}, G_0)$$

略証　定理2より任意の $T\in\mathbf{B}$ は

$$T=\Sigma'_{\alpha\in G}T_{\alpha}U_{\alpha} \qquad T_{\alpha}\in\mathbf{A}$$

とかけるが 各 $\alpha\in G$ に対して $I_{\alpha}=\{T_{\alpha}\mid T\in\mathbf{B}\}$ とおくと I_{α} は $\mathbf{A}$ の両側イデアル。従つて $I_{\alpha}=(0)$ か $I_{\alpha}=\mathbf{A}$　$G_0=\{\alpha\in G\mid I_{\alpha}\neq(0)\}$ ととるとよい。

接合積が factor になる条件はさきに定理3，4をのべたが次のようなものも知られている。

定理 13. $\mathbf{A}$ を有限型 factor で invariant $C=1$; G を $\mathbf{A}$ の automorphism の可換群; $P=\{a\in\mathbf{A}\mid a^{\alpha}=a \text{ for all } \alpha\in G\}$ とおくとき，$(\mathbf{A}, G)$ が factor になるための必要十分条件は，$xa=ax^{\alpha}$ for all $x\in\mathbf{A}$ がなりたつような $a\in\mathbf{P}$ $a\neq\lambda 1$, $\alpha\in G$, $\alpha\neq 1$ が存在しないことである。

定理 14. $\mathbf{A}$ を有限型 factor で invariant $C=1$; G を $\mathbf{A}$ の automorphism の群でその共軛類 $C_g=\{h^{-1}gh\mid h\in G\}$ が単位元以外のすべての $g\in G$ に対して infinite ならば $(\mathbf{A}, G)$ は factor である。

また§3で考えた factor の性質については次のようなことが知られている。

定理 15. $\mathbf{A}$ を可分なヒルベルト空間上の approximately finite factor, G_0 を任意の countable group とすると G_0 と同型な $\mathbf{A}$ の outer automorphism の群 G で接合積 $(\mathbf{A}, G)$ が (Γ) をもつものが存在する。

定理 16. $\mathbf{A}$ を可分なヒルベルト空間上の approximately finite factor, Φ を二個の生成元をもつ自由群とすると，Φ を $\mathbf{A}$ の outer automorphisms の

群と考えたとき接合積（$\mathbf{A}$，Φ）は性質（Q）をもたない。

最後に直積との関係について次の定理をあげておこう。

定理 17. $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ を共に有限型 factor で invarint $C=1$ とし；G_1，G_2 を夫々 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ の automorphisms の群とすると（$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$，$G_1\times G_2$）と（$\mathbf{A}$，$G_1$）$\otimes$（$\mathbf{B}$，$G_2$）は同型である。

これらの定理の証明はすべてここでは省略する。

文献 〔13〕，〔14〕，〔15〕，〔19〕，〔23〕，〔30〕，〔31〕，〔32〕，〔33〕．

Appendix 作用素環の生成

今迄の話題とは話がすつかりはずれるけれども作用素環の生成についての最近の研究について一言ふれよう。この問題については二つの方向があると考えられる。一つは作用素環 $\mathbf{A}$ が与えられたとき $\mathbf{A}$ が何個の生成元をもつか — von Neumann の可換な作用素環に関する結果と，代数的な興味から —，他の一つはヒルベルト空間上の作用素 T が与えられたとき，その生成する作用素環 $\mathcal{R}$（T）はどんな作用素環であるか？

前者についての最初の結果は良く知られているように von Neumann の

定理 A. 可分なヒルベルト空間 H 上の可換な作用素環は只一つの hermitian 作用素から生成される。

である。その後1955年 C. Davis が

定理 B. 可分なヒルベルト空間上の full operator ring は3個の projection で 生成される。

ことを証明した。更に C. Pearcy はこの結果を改良して次の結果を示した。

定理 C. 可分なヒルベルト空間上のＩ型の作用素環は只一つの生成元をもつ。

更にごく最近斉藤－鈴木はこの結果を approximately finite な作用素環にまで拡張して次の定理を証明した。

定理 D. 可分なヒルベル空間上の hyper finite な作用素環は只一つの生成元をもつ。

後者の問題については non－normal な作用素の研究をそれの生成する作用素環によつて行なつたらという試みの下に提唱されたように思われるがまだ緒についたばかりである。

定義　ヒルベルト空間上の作用素 T はその生成する作用素環 $\mathcal{R}$ (T) が I，II_1，II_∞，III型なるに従つて夫々 I，II_1，II_∞，III型の作用素であるという。

作用素環の良く知られた結果によれば作用素環 $\mathbf{M} = \mathcal{R}(T)$ はその central projection E_1，E_{21}，$E_{2\infty}$，E_3 によつて $M = M_{E_1} \oplus M_{E_{21}} \oplus M_{E_{2\infty}} \oplus M_{E_3}$ と直和分解され，夫々 I，II_1，II_∞，III型と分けられる。従つて T も $T_{\mathrm{I}} \oplus T_{\mathrm{II}_1} \oplus T_{\mathrm{II}_\infty} \oplus T_{\mathrm{III}}$ の各 part に分解される。したがつて各 part の研究を行なえば良い。現在までに得られている結果は各 part の存在定理だけのようである。それを次にしるしておく。

1°　isometry は I 型である。

2°　nearly normal operator （即ち $T \smile T^*T$）は I 型

3°　完全連続作用素は I 型

4°　II型，III型の作用素はともに存在する。

尚これらについては第1回 functional analysis symposium における鈴木氏の報告にくわしい。

文献　Appendix 関係文献を参照。

〔文　　献〕

〔1〕 R. J. Blattner; Automorphic group representations, Pacific J. Math., 8('58), 665–677.

〔2〕 H. Chôda–M. Echigo; A new algebraical property of certain von Neumann algebras, Proc. J. Acad., 39 ('63), 651–655.

〔3〕 H. Chôda–M. Echigo; A remark on a construction of finite factors I, ibid., 40('64), 474–478.

〔4〕 H. Chôda–M. Echigo; A remark on a construction of finite factors II, ibid., 40('64), 479>481.

〔5〕 J. Dixmier; Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Paris, 1957.

〔6〕 J. Glimm; Families of induced representations, Pacific J. Math., 12('62), 885–911.

〔7〕 F. J. Murray–J. von Neumann; Rings of operators, Ann. of Math., 36('37), 116–229.

〔8〕 F. J. Murray–J. von Neumann; Rings of operators III, ibid., 41('40), 94–161.

〔9〕 F. J. Murray–J. von Neumann; Rings of operators IV, ibid., 44('43), 716–808.

〔10〕 M. Nakamura–Z. Takeda; On some lementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. J. Acad., 34('58), 489–493.

〔11〕 M. Nakamura–Z. Takeda; On certain examples of the crossed product of finite factors I, ibid., 34(758), 495–499.

〔12〕 M. Nakamura–Z. Takeda; On certain examples of the crossed product of finite factors II, ibid., 34 ('58), 500–502.

[13] M. Nakamura–Z. Takeda; On the extensions of finite factors I, ibid., 35 ('59), 149–154.

[14] M. Nakamura–Z. Takeda; A Galois theory for finite factors, ibid., 36 ('60), 258–260.

[15] M. Nakamura–Z. Takeda; On the fundamental theorem of the Galois theory for finite factors, ibid., 36 ('60), 313–318.

[16] M. Nakamura–Z. Takeda; On inner automorphisms of certain finite factors, ibid., 37 ('61), 31–32.

[17] M. Nakamura–Z. Takeda; On outer automorphisms of certain finite factors, ibid., 37 ('61), 215–216.

[18] L. Pukanszky; Some examples of factors, Publ. Math., 4 ('56), 135–156.

[19] T. Saitô; The direct and crossed product of rings of operators, Tôhoku M. J., 11 ('59), 299–304.

[20] T. Saitô; Some remarks of a representation of a group; Tôhoku M. J., 12 ('60), 383–388.

[21] T. Saitô; On a representation of a countably infinite group, ibid., 13 ('61), 268–273.

[22] T. Saitô; On groups of automorphisms of finite factors, ibid., 13 ('61), 427–433.

[23] T. Saitô; Some theorems on the crossed products of finite factors, ibid., 14 ('62), 312–316.

[24] J. Schwartz; Two finite, non–hyperfinite, non–isomorphic factors, Comm. Pure and Appl. Math., 16 ('63), 19–26.

[25] J. Schwartz; Non–isomorphis of a pair of factors of type III, ibid., 16 ('63), 111–120.

〔26〕 I. M. Singer; Automorphisms of finite factors, Amer. J. Math., 77('55), 117–133.

〔27〕 N. Suzuki; A linear representation of a countably infinite group, Proc. J. Acad., 34('58) 575–579.

〔28〕 N. Suzuki; Crossed products of rings of operators, Tôhoku M. J., ('59), 113–124.

〔29〕 N. Suzuki; Certain types of groups of automorphisms of a factor, ibid., 11('59), 314–320. Correction, ibid., 12('60).

〔30〕 N. Suzuki; Extensions of rings of operators in Hilbert spaces, ibid., 14('62), 217–232.

〔31〕 Z. Takeda; On the extensions of finite II, Proc. J. Acad., 35('59), 215–220.

〔32〕 Z. Takeda; On the extension theorem of the Galois theory for finite factors, ibid., 37('61), 78–82.

〔33〕 Z. Takeda; On the normal basis theorem of the Galois theory for finite factors, ibid., 37('61), 144–148.

〔34〕 T. Turumaru; Crossed product of operator algebra, Tôhoku M. J., 10('58), 355–365.

〔Appendix 文 献〕

〔1〕 C. Davis; Generatora of the ring of bounded operators, Proc. Amer. Math. Soc., 6('55), 970–972.

〔2〕 J. von Neumann; Zur Algebra der Funktional operationen und Theorie der normalen operatoren, Math. Ann., 102('29), 370–427.

〔3〕 C. Pearcy; W^*-algebra with a single generator, Proc. Amer. Math. Soc., 13('62), 831－832.

〔4〕 C. Pearcy; On certain von Neumann algebras which are generated by partial isometry, ibid., 15('64), 393－395.

〔5〕 N. Suzuki; Isometries on Hilbert spaces, Proc. J. Acad., 39('63), 435－438.

〔6〕 N. Suzuki; Hilbert spaces に於る non normal operator の大域的研究，第2回 Functional analysis symposium, 1963, 17－28.

〔7〕 N. Suzuki—T. Saitô; On the operators which generate continuous von Neumann algebras, Tôhoku M. J., 15('63), 277－280.

尚，その他の文献は〔6〕にくわしい。